エネルギー原理とハイブリッド法などについて (有限要素法の数学的基礎理論)

菊地, 文雄

数理解析研究所講究録
202巻 1974年 11-20

エネルギー原理とハイブリッド法などについて

東大 宇宙航空研　菊地文雄

§-1 序

有限要素法における最も典型的な手法はいわゆる最小ポテンシャルエネルギ原理に基く変位法の系統のものであるが，平板の曲げ問題などでは形状関数の適合性条件がかなりうるさく，上述の手法が必ずしも実用的とは言い難い。そこでPianに始るハイブリッド応力法など，様々な変分原理がラグランジュの未定乗数法に依って導びかれ実際の有限要素モデルの作成に供せられている。この詳細については鷲津教授の著書(1)の中に系統的に述べられており，いまさら繰り返す必要もないとは思うが，ここでは弾性論に即して簡単に，しかもやや便宜的な形で代表的な変分原理を列挙する。次にある種の混合法，もしくはハイブリッド応力法に対して収束の十分条件を述べ，具体的なスキームについて妥当性を調べる。

§-2 R^m $(m=1,2,3)$ における弾性論の概要(2),(3)

ΩはR^m内に弾性体の占める有界連結開集合とし境界$\Gamma=\partial\Omega$は区分的に十分なめらかとする。以下ではデカルト座標x^i

$(1 \leqq i \leqq m)$ を用い Einstein の総和規約を使用する。次の諸量を定義する。ただし $1 \leqq i, j \leqq m$ とする。n 以外は Ω で定義.

$u : u^i$ 弾性体の変位. $f : f^i$ 弾性体に働く外力.

$v : e^{ij}$ 変形状態を示す量でここではひずみとする。必要に応じ対応する応力 s^{ij} も用いる。$e^{ij}=e^{ji}$, $s^{ij}=s^{ji}$

$n : n^i$ $\Gamma = \partial\Omega$ の外向き法線.

(i) <u>変位もしくは分布外力のなす Hilbert 空間 ---- H</u>

通常 $H = \{L_2(\Omega)\}^m$ を用いる。すなわち $u_1, u_2 \in H$ とすれば内積は

$$(u_1, u_2) = \int_\Omega u_1^i u_2^i \, d\Omega \quad , \tag{1}$$

ノルムは $u \in H$ に対し

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \quad . \tag{2}$$

(ii) <u>ひずみ — 変位関係式</u> :

$$v = \overset{\circ}{\nabla} u \tag{3}$$

具体的には u が微分可能として

$$e^{ij} = \frac{1}{2}(u^i_{,j} + u^j_{,i}) \tag{4}$$

で与える。ただし $u^i_{,j} = \partial u^i / \partial x^j$ とする。 (5)

(iii) <u>応力 — ひずみ関係式</u> : 外力が作用し弾性体に変形が生じると内部に応力が生じる。応力とひずみの間には次の1対1の関係が存在する。

$$s^{ij} = E^{ijkl} e^{kl} \tag{6}$$

E^{ijkl} は物質定数で弾性定数と呼ばれ, 次の関係式を満すものとする。

$$E^{ijkl} = E^{jikl} = E^{ijlk} = E^{klij} \tag{7}$$

$$c_1 e^{ij} e^{ij} \geqq E^{ijkl} e^{kl} e^{ij} \geqq c_2 e^{ij} e^{ij} \tag{8}$$

$c_1 > 0$, $c_2 > 0$ は e^{ij}, 場所などによらぬ定数とする。等方性などの仮定を設ければ弾性定数はヤング率, ポアソン比で表

わされる。以下 e^{ij} を与えたとき随伴する応力も既知とする。

(iv) ひずみ v のなす Hilbert 空間 ---- $\mathcal{H}$

必ずしも適合条件式(3)を満足しないひずみ v_1, v_2 に対し内積 $\langle v_1, v_2 \rangle$ を

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_\Omega E^{ijkl} e_1^{kl} e_2^{ij} \, d\Omega = \int_\Omega s_1^{ij} e_2^{ij} \, d\Omega \quad , \qquad (9)$$

ノルム $|||v|||$ を

$$|||v||| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \qquad (10)$$

で与えて Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を作る。ここで(7)，(8)が重要。

(v) 平衡方程式 ：

$$\mathring{D}^* v = f \qquad (11)$$

すなわち $-s^{ij}{}_{,j} = f^i$ または $-(E^{ijkl} e^{kl})_{,j} = f^i$ (12)

である。これはΩ内の無限小要素の平衡から導びかれる。

(vi) divergence theorem ： Gauss-Green の公式に対応し，仮想仕事の原理や各種変分原理を導くのに重要な役割を果す。$\mathring{D}$, $\mathring{D}^*$ はすでに与えたものとする。このとき

$$\langle \mathring{D} u, v \rangle = (u, \mathring{D}^* v) + [u, Bv] \qquad (13)$$

が成立する。ただし $[\ ,\ ]$ は Γ 上の双一次形式で $w : w^i$ に対し

$$[u, v] = \int_\Gamma u^i w^i \, d\Gamma \quad . \qquad (14)$$

また

$$(Bv)^i = s^{ij} n^j \quad . \qquad (15)$$

(vii) 斉次境界条件 ： Γ 上では何らかの拘束か Γ 上の外力との平衡が成立している。

(a) 幾何学的境界条件 $u = 0 \ : \ u^i = 0$ on Γ_1 (16)

(b) 力学的境界条件 $Bv = 0 \ : \ s^{ij} n^j = 0$ on $\Gamma - \Gamma_1$ (17)

(viii) <u>T, T^*</u>　$\mathring{T}$に(16)の幾何学的境界条件を導入した作用素を $T: D(T)\subset H \to \mathcal{H}$ とする。$D(T)$の元には当然ある程度のなめらかさを要求する。厳密にはTは最小閉拡張に拡張し，T^*はその共役作用素として定義する。E^{ijkl}がなめらかで $v\in D(T^*)$ がなめらかなら T^*v は $\mathring{T}^*v$ に一致し，v は(17)の力学的境界条件を満足する。$u\in D(T)$, $v\in D(T^*)$ に対し定義より次式が成立する。

$$\langle Tu, v\rangle = (u, T^*v) \tag{18}$$

(ix) <u>系の安定性</u>：　$u\in D(T)$ なら $|||Tu||| \geq C_3\|u\|$　(19)

C_3はuに依存しない正定数である。この条件は(16)の幾何学的境界条件が適切なら通常満足されている。

(x) <u>線形の弾性論の典型的な問題</u>　$f\in H$（外力）を与えたとき

$$v = Tu\ ,\quad T^*v = f \tag{20}$$

を満足する $u\in D(T)$，$v\in D(T^*)$ を見出すこと。

§-3　<u>仮想仕事の原理</u>

$\delta u\in D(T)$ を任意の仮想変位とすると $\mathring{T}^*v=f$，$Bv=0$ ゆえ

$$(\mathring{T}^*v, \delta u) + [Bv, \delta u] = (f, \delta u) \tag{21}$$

部分積分により

$$\langle v, T\delta u\rangle = (f, \delta u) \tag{22}$$

$v=Tu$ を導入すると

$$\langle Tu, T\delta u\rangle = (f, \delta u) \tag{23}$$

厳密解 $u\in D(T)$ は任意の $\delta u\in D(T)$ に対し(23)を満足する。

§-4　<u>各種の汎関数と変分原理（その1）</u>

(i) <u>最小ポテンシャルエネルギの原理</u>　(23)式は次の汎関数

$\Pi_1(\bar{u})$ ($\bar{u}\in D(\mathcal{T})$に対し定義される)の停留条件式として与えられる。 $$\Pi_1(\bar{u}) = \frac{1}{2}|||\mathcal{T}\bar{u}|||^2 - (f,\bar{u}) \tag{24}$$

ただし $\bar{u}$ の変分を仮想仕事 δu と同一視する。(23)の解 u は(24)の最小値を与え，逆に(24)の最小元は(23)を満足する。この汎関数を用いた有限要素法を"適合変位法"と呼ぶことにしよう。

(ii) Hellinger - Reissnerの変分原理 …… 混合法

(ii-1) u, v を(20)の解，$\delta u \in D(\mathcal{T})$, $\delta v \in H$ を任意に選べば

$$\langle \mathcal{T}u, \delta v\rangle = \langle v, \delta v\rangle \quad , \langle v, \mathcal{T}\delta u\rangle = (f, \delta u) \tag{25}$$

を得る。これは $\bar{u}\in D(\mathcal{T})$, $\bar{v}\in H$ に対して定義される汎関数 Π_2 の停留条件に一致する。 $$\Pi_2(\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{2}|||\bar{v}|||^2 - \langle\mathcal{T}\bar{u},\bar{v}\rangle + (f,\bar{u}) \tag{26}$$

(ii-2) 同様に $\delta u \in H, \delta v \in D(\mathcal{T}^*)$ に対して次式を得る。

$$(u, \mathcal{T}^*\delta v) = \langle v, \delta v\rangle \quad , \quad (\mathcal{T}^* v, \delta u) = (f, \delta u) \tag{27}$$

$\Pi_3(\bar{u},\bar{v})$ $\left(\bar{u}\in H, \bar{v}\in D(\mathcal{T}^*)\right)$ は $\Pi_3(\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{2}|||\bar{v}|||^2 - (\bar{u},\mathcal{T}^*\bar{v}) + (f,\bar{u})$ (28)

実際には $\mathcal{T}$ をさらに $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ のように分解していろいろな汎関数が用いられている。これは板の曲げ問題に便利である。

(iii) 最小コンプリメンタリエネルギの原理　(28)で特に $\bar{v}$ として $\bar{v}\in D(\mathcal{T}^*)$ かつ $\mathcal{T}^*\bar{v} = f$ なるものを用いると Π_3 は

$$\Pi_4(\bar{v}) = \frac{1}{2}|||\bar{v}|||^2 \tag{29}$$

となる。(20)の解 v は上記の範囲の $\bar{v}$ の中で Π_4 を最小にする。これを用いた有限要素法を"平衡応力法"と呼んでおく。

§-5 各種の汎関数と変分原理（その2）

Ωを有限要素$\{\Omega_k\}_{k=1}^n$に分割し，各要素Ω_kで式(13)と同じ形式の公式 $\langle \mathring{T} u, v\rangle_{\Omega_k} = (u, \mathring{T}^* v)_{\Omega_k} + [u, Bv]_{\partial\Omega_k}$ (30)

が成立するものとする。ただし$u, v, \mathring{T}, \mathring{T}^*, B$などは$\Omega_k$，又は$\partial\Omega_k$でのみ考えるものとしよう。

(i) <u>ハイブリッド応力法</u>　(26)の$\pi_2(\bar{u},\bar{v})$で各Ω_kで$\bar{v}$は十分なめらかでしかも$\mathring{T}^*\bar{v} = f$ in Ω_kとすると(30)を用いて

$$\pi_5(\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{2}|||\bar{v}|||^2 - \sum_{k=1}^n [\bar{u}, B\bar{v}]_{\partial\Omega_k} \tag{31}$$

を得る。これを適合変位法と比較すると$\bar{v}$の導入により$\bar{u}$の分布仮定は$\partial\Omega_k$上のみでよくなった。一方平衡応力法に比較すれば$\bar{u}$の存在により要素間境界と$\Gamma - \Gamma_1$上での平衡の条件が不要になった。これはPianにより導びかれた。

(ii) <u>ハイブリッド変位法―1</u>　$\pi_1(\bar{u})$では要素間境界で$\bar{u}$の連続性が要求されている。この条件を緩和するため$\partial\Omega_k$上でLagrangeの未定乗数λを導入して次のπ_6を得る。

$$\pi_6(\bar{u},\bar{\lambda}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n |||\mathring{T}\bar{u}|||^2_{\Omega_k} - (f,\bar{u}) - \sum_{k=1}^n [\bar{u},\bar{\lambda}]_{\partial\Omega_k} \tag{32}$$

ただし$\Gamma - \Gamma_1$では$\bar{\lambda} = 0$，となりあう要素$\Omega_k, \Omega_{k'}$間の要素間境界では$\bar{\lambda}|_{\partial\Omega_k} = -\bar{\lambda}|_{\partial\Omega_{k'}}$とする。(32)の停留条件を調べると$\lambda = B\mathring{T}u$ on $\partial\Omega_k$であることがわかる。

(iii) <u>ハイブリッド変位法―2</u>　(ii)と類似の思想ではあるが，今度は境界と要素間境界上の関数としてϕを導入し，それが各Ω_kのuの境界値と一致するようにしたい。Γ_1上では$\phi = 0$

とする。対応する*Lagrange*の未定乗数をλ^*とすると汎関数は次式のようになる。

$$\pi_7(\bar{u},\bar{\phi},\bar{\lambda}^*)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|||\mathring{T}\bar{u}|||^2_{\Omega_k}-(f,\bar{u})-\sum_{k=1}^{n}[\bar{u}-\bar{\phi},\bar{\lambda}^*]_{\partial\Omega_k} \quad (33)$$

$\bar{\lambda}^*$は各$\partial\Omega_k$上の関数で(32)と異なりとなりの要素での$\bar{\lambda}^*$とは独立でよい。π_7の停留条件を調べると$\lambda^*=B\mathring{T}u$ on $\partial\Omega_k$である。場合により$\bar{\lambda}^*=B\mathring{T}\bar{u}$としてはじめから$\bar{\lambda}^*$を消去することがある。さらに要素頂点で$\bar{u}=\bar{\phi}$とすることも多い。

§-6 非適合変位法

$\bar{u}\in D(T)$に対しπ_1は

$$\pi_8(\bar{u})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|||\mathring{T}\bar{u}|||^2_{\Omega_k}-(f,\bar{u}) \quad (34)$$

と書ける。しばしば$\partial\Omega_k$での連続性が不十分な$\bar{u}$に対しても"形式的"にπ_8を使ってスキームを構成することがある。

§-7 ある種の混合法，ハイブリッド応力法の収束について

序でも述べたように適合変位法以外に非適合変位法やハイブリッド法，混合法などが有限要素法の定式化に用いられているが，適合変位法以外ではその収束に関する考察は遅れており，最近いくつか成果が発表されるようになってきた段階のようである。(4) 以下では$\pi_2(\bar{u},\bar{v})$，もしくはその特別な場合としての$\pi_5(\bar{u},\bar{v})$を用いた有限要素法についての収束の考察を述べる。その詳細は文献-(5)に発表されている。

§-5で述べたような有限要素分割の列を$\{\Gamma^{(\gamma)}\}_{\gamma=1,2,\cdots}$で表わし各分割については$\{\Omega_k^{(\gamma)}\}_{k=1}^{n(\gamma)}$のように$(\gamma)$をつけて記す。

(20)の u, v を次の $U^{(\gamma)}, V^{(\gamma)}$ で近似する。$\varphi_\alpha^{(\gamma)} \in D(T)$, $\psi_\beta^{(\gamma)} \in \mathcal{H}$ とする。

$$U^{(\gamma)} = \sum_{\alpha=1}^{p(\gamma)} a_\alpha^{(\gamma)} \varphi_\alpha^{(\gamma)} \quad , \quad V^{(\gamma)} = \sum_{\beta=1}^{q(\gamma)} b_\beta^{(\gamma)} \psi_\beta^{(\gamma)} \tag{35}$$

係数 $\{a_\alpha^{(\gamma)}\}$, $\{b_\beta^{(\gamma)}\}$ は (25) に対応する次式で決定する。

$$\langle TU^{(\gamma)}, \psi_\beta^{(\gamma)} \rangle = \langle V^{(\gamma)}, \psi_\beta^{(\gamma)} \rangle \quad , \langle V^{(\gamma)}, T\varphi_\alpha^{(\gamma)} \rangle = (f, \varphi_\alpha^{(\gamma)}) \tag{36}$$

なおハイブリッド応力法では $\mathring{T}^* \psi_\beta^{(\gamma)} = 0$ in $\Omega_k^{(\gamma)}$ $(1 \leqq k \leqq q(\gamma))$ としさらに非斉次な項 $\psi_0^{(\gamma)}$ ($\mathring{T}^* \psi_0^{(\gamma)} = f$ in $\Omega_k^{(\gamma)}$)を $V^{(\gamma)}$ に加える。

$\gamma \to \infty$ のとき $TU^{(\gamma)} \to Tu$, $V^{(\gamma)} \to v$ が $\mathcal{H}$ で成立するための十分条件を次に与えよう。まず次の条件はこの目的のため当然であろう。u, v は各 f に対する (20) の解である。

〔I〕 各 γ に対して (35)の形の $\hat{U}^{(\gamma)}, \hat{V}^{(\gamma)}$ を適当に選んで

$$\lim_{\gamma \to \infty} |||T\hat{U}^{(\gamma)} - Tu||| = \lim_{\gamma \to \infty} |||\hat{V}^{(\gamma)} - v||| = 0 \tag{37}$$

とできる。

次に $U^{(\gamma)}$ と $V^{(\gamma)}$ の間には何らかの関連が必要になる。(37)もそうではあるが，さらに安定性を与えるため次の条件を課す。

〔II〕 $P^{(\gamma)}$ を $\mathcal{H}$ から (35)の形の $V^{(\gamma)}$ 全体（ハイブリッド応力法のときは $\psi_0^{(\gamma)}$ は落す）のなす空間への射影演算子 (orthogonal projector) とする。このとき γ にも $U^{(\gamma)}$ にも依存しない正定数 c_4 を選べて次式が成立する。

$$|||P^{(\gamma)} TU^{(\gamma)}||| \geqq c_4 |||TU^{(\gamma)}||| \tag{38}$$

以上の条件のもとに有限要素解の安定性，存在，一意性，収束などを結論できる。くわしくは文献（5）を参照されたい。

その際得られる $T\hat{U}^{(\gamma)}, V^{(\gamma)}$ の誤差は (37) で評価される $|||T\hat{U}^{(\gamma)} - Tu||| + |||V^{(\gamma)} - v|||$ と同程度である。また (19) により $U^{(\gamma)}$ の H における収束も結論できる。

次に簡単な例題として長方形領域 $\Omega \subset R^2$ での Dirichlet 問題を考えよう。

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{39}$$

ここでは $H = L_2(\Omega)$, $\mathcal{H} = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ で T は Dirichlet 条件を考慮した grad, T^* は $-$div である。

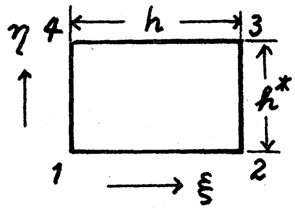

図-1 長方形要素

Ω を右図のような長方形要素に分割し、辺長 h, h^* を単位とする局所直交座標を ξ, η とする。以下では厳密解を u と $v = (g^1, g^2)$ で、近似解を U と $V = (Q^1, Q^2)$ で記す。u は各要素内で ξ, η の双一次式で近似する。下つきの(1)などは頂点での値を示す。

$$U = U_{(1)}(1-\xi)(1-\eta) + U_{(2)}\xi(1-\eta) + U_{(3)}\xi\eta + U_{(4)}(1-\xi)\eta \tag{40}$$

一方 v は次のように近似する。A_1 などは未知パラメタである。

$$Q^1 = \begin{cases} A_1 & 0 \leqq \eta \leqq 0.5 \\ A_2 & 0.5 < \eta \leqq 1.0 \end{cases}, \quad Q^2 = \begin{cases} B_1 & 0 \leqq \xi \leqq 0.5 \\ B_2 & 0.5 < \xi \leqq 1.0 \end{cases} \tag{41}$$

$\partial\Omega$ で $U = 0$ とすれば $U \in D(T)$ である。また $V \in \mathcal{H}$ は明らかで、しかも $\mathring{T}^* V = 0$ を各要素で満しているので、V の非斉次項を適切に選べばこのスキームはハイブリッド応力法にもなっている。TU を各要素で求めると

$$\partial U/\partial x = U_{x1}(1-\eta) + U_{x2}\eta, \quad \partial U/\partial y = U_{y1}(1-\xi) + U_{y2}\xi \tag{42}$$

ここに $\bar{U}_{x1}=(\bar{U}_{(2)}-\bar{U}_{(1)})/h$, $\bar{U}_{x2}=(\bar{U}_{(3)}-\bar{U}_{(4)})/h$, $\bar{U}_{y1}=(\bar{U}_{(4)}-\bar{U}_{(1)})/h^*$, $\bar{U}_{y2}=(\bar{U}_{(3)}-\bar{U}_{(2)})/h^*$

同様に $PT\bar{U}$ (PはHからVのなす空間への orthogonal projector)

を求めると(41)の A_1 などは次のようになる。

$$\begin{cases} A_1=\frac{3}{4}\bar{U}_{x1}+\frac{1}{4}\bar{U}_{x2}, \quad A_2=\frac{1}{4}\bar{U}_{x1}+\frac{3}{4}\bar{U}_{x2}, \quad B_1=\frac{3}{4}\bar{U}_{y1}+\frac{1}{4}\bar{U}_{y2} \\ B_2=\frac{1}{4}\bar{U}_{y1}+\frac{3}{4}\bar{U}_{y2} \end{cases} \tag{43}$$

これから簡単な計算により $\quad |||PT\bar{U}||| \geqq \frac{1}{2}|||T\bar{U}||| \qquad (44)$

を得る。また $u \in W_2^2(\Omega)\cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$ に対して $\hat{U}$ を u の補間関数,

$\hat{V}$ を $PT\hat{U}$ とすると, $\bar{h}$ を全要素に対しての辺長の最大値と

して $\quad |||T\hat{U}-Tu|||+|||\hat{V}-v||| \leqq c_5\,\bar{h}\,\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \qquad (45)$

なる評価を得る。よって $\bar{h}\to 0$ なら有限要素解の収束を結論

できる。

§-8 結言

ハイブリッド法などの収束の考察は最近ようやく明らかになりかかってきた段階である。特に重要なのは(38)のような評価をいかに見出すかという点にあると思う。

《文献》(1) 鷲津: 弾性学の変分原理概論, 培風館(1972)

(2) A. Sommerfeld : Mechanics of Deformable Bodies, Academic Press (1964)

(3) H. Fujita, J. Phys. Soc. Japan, 10 1-8 (1955)

(4) 三好, 藤井, bit 5 417-422 (1973)

(5) 菊地, 安藤, 日本機械学会講演論文集 No. 730-2,
99-114 (1973)